実践報告

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す単元の開発と実践

－四角形の相似条件の追究－

菊野　慎太郎

（静岡大学教育学部附属静岡中学校）

Planning a Unit for Junior High School Students to Unify and Expand Mathematical Phenomena and Teaching the Unit in Fuzoku SHIZUOKA Junior High School: Investigation of Similarity Conditions of Quadrilaterals

Kikuno Shintaro

要旨

本研究の目的は，相似の指導における統合的・発展的な考え方を育成する題材及び単元を開発し，授業実践することで，メタ認知的活動の子どものあらわれを明らかにすることである。その結果から，題材選定，題材構想など授業者の手だての有効性について検証することである。授業実践を通して，統合的・発展的に考察するあらわれが多くみられた。アンケート分析では統合的・発展的に学ぶあらわれや学び方について自覚する記述から，本実践の有効性と授業づくりに対する示唆を得た。

キーワード：　四角形の相似条件　多角形の相似条件　合同条件　統合的・発展的

１．はじめに

平成 29 年告示学習指導要領の中学校数学科の目標の「思考力，判断力，表現力等」にあたる記述には，「数学を活用して事象を論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。」（文部科学省，2018a，p.65）とある。このうち，本研究では「図形の性質を見いだし統合的・発展的に考察する力」に着目する。

筆者の所属する現任校では 2020 年より研究テーマを「学びの自覚」として，子どものあらわれから，子どもが何を自覚し，どのように学びを人間形成につなげているのかを明らかにしようとしている。そのために教科で願う学びと，教科で育みたい人間像を設定し，教科で人を育むための授業づくりを研究している。さらに数学科では，子どもたちが数や図形，統計，関数の概念を拡張したり，統合したり（関連づけたり）させながら，再構築していく過程を大切にしている（資料 1）。

この過程を重ねて学ぶことで，メタ認知的に数学の見方・考え方を獲得していくことができると考えている。この過程は，教師が一方的に学習内容を教える授業ではつくりだすことができない。子どもを学びの主体とし，子どもが生み出す問いから統合的・発展的な学びが展開されるような題材を検討する必要がある。このように題材を構想し，授業における子どものあらわれをみとることで，「論理的かつ客観的に解決にあたる人」と「学びの自覚」の関係性について明らかにしていきたいと考えている。

対話・試行錯誤

⇔ 様々な事象を数理的にとらえ，疑問を抱く（課題・前提条件）

⇔ 見当をつける（予想・条件づけ・仮説を立てる）

⇔ 数学的な表現（言葉や式，図，表，グラフ）による「根拠を明確にした考え」をもち，自覚された学びをもって結びつけていくことで，性質やきまりを見つけ，筋道立てて説明していく

⇔ 数や図形，統計，関数の概念を拡張したり，統合したり（関連づけたり）していく

⇒新たな疑問がさらなる過程を生み出す

資料 1　子どもの学びを実現していく過程

ここで，統合的・発展的な考え方に関わって，片桐（2017）と中島（2015）を参照する。片桐（2017）は，数学的な考え方を，数学的な態度，数学の方法，内容の３つの側面で捉え，数学の方法に関係した数学的な考え方を「①帰納的な考え方 ②類推的な考え方 ③演繹的な考え方 ④統合的な考え方 ⑤発展的な考え方 ⑥抽象化の考え方 ⑦単純化の考え方 ⑧一般化の考え方 ⑨特殊化の考え方 ⑩記号化の考え方 －数量化･図形化の考え方－」として，統合的な考え方，発展的な考え方をそれぞれ次のように規定している。

＜統合的な考え方＞
「多くの事柄を個々ばらばらにしておかないで，より広い観点から，それらの本質的な共通性を抽象し，これによって，同じものとしてまとめていこうとする考え方である」とし，次の３つのタイプを取りあげている

・統合I型(高次への統合)
・統合II型(包括的統合)
・統合III型(拡張)

＜発展的な考え方＞
「統合したことをさらに広い範囲に用いていこうとしたり，一つの結果が得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見していこうとする」として，次の２つのタイプを取りあげている。

・発展I型（条件変更による発展）
・発展II型（観点変更による発展）

また，統合的に考察することについて，中島 (2015) は，次のように３つの場合があると述べている。

＜集合による統合＞
はじめは異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合

＜拡張による統合＞
はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合

＜補完による統合＞
すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合

なお，学習指導要領解説数学編（文部科学省，2018b）には統合的・発展的についての規定はないが，学習指導要領に先立つ中央教育審議会・初等中等教育分科会・教育課程部会の「算数・数学ワーキンググループ」では審議の取りまとめにおいて，統合的に考えることについて「関連づける。既習の事柄と結びつける。など」，発展的に考えことについて「適用範囲を広げる。条件を変える。新たな視点から捉え直す。など」としている（文部科学省，2016）。

以上のことから，本研究では，統合的な考え方，発展的な考え方をそれぞれ次のように規定して研究を進めることにする。

合同条件などの数学的知識など既習事項と，相似など新たな学びとつなげて考えたり，三角形から四角形，五角形など発展的に考えていく中で，共通することがら（規則性や式など）を見いだしたりすることは「統合的な考え方」である。

また，三角形から四角形……ｎ角形と条件を発展させたり，規則性の理由を様々な視点で考えようとしたりすることは「発展的な考え方」である。

上記のように「統合的・発展的な考え方」をそれぞれ定義し，子どものあらわれを考察していくこととする。

２．研究の目的

本研究の目的は，相似の指導における統合的・発展的な考え方を育成する題材及び単元を開発し，授業実践することで，メタ認知的活動の子どものあらわれを明らかにすることである。その結果から，題材選定，題材構想など授業者の手だての有効性について検証することである。

３．研究方法

(1) 相似の指導における統合的・発展的な考え方を育む題材及び単元を開発する。
(2) 題材における問いの共有の捉えを明らかにして授業実践を行い，子どものあらわれを記録し，統合的・発展的に考えている様子を捉える。
(3) 授業後にアンケートを行い，統合的・発展的に考えていることを自覚している（メタ認知している）子どものあらわれについて分析を行う。

４．統合的・発展的な考え方を育成する題材の構想

本研究では，多角形の相似条件を，多角形の辺と内角に制限し考察する。この相似条件には，多角形の対角線は用いないこととする。以下のように，三角形の相似条件からはじまり，四角形の相似条件，多角形の相似条件へと統合的・発展的に考察していけるように題材を構想した。

(1)三角形の相似条件を，三角形の合同条件をもとに統合的に考える

中学校第３学年の教科書において，相似とは「拡大縮小したときにぴったり重なる図形」と定義されている。また，相似な図形は次の二つの性質をもつ。

・対応する辺の比がすべて等しい
・対応する角の大きさが等しい

そして相似条件を考える上で大切なのは次の三角形の合同条件である。

ア　３組の辺がそれぞれ等しい
イ　２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
ウ　１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

ア～ウを根拠に相似な三角形をかき，相似条件を考察していくと次のエ～カのように見当をつけることができるだろう。

アからはエ「３組の辺の比がそれぞれ等しい」
イからはオ「２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」
ウからはカ「１組の辺の比とその両端の角がそれ

ぞれ等しい」

さらに，カについて「１組の辺の比が等しい」は意味を成さないので，カは「対応する２角がそれぞれ等しい」となる。

つまり三角形の相似条件は次のエ，オ，キのようにまとめることができる。

エ　３組の辺の比がそれぞれ等しい

オ　２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

キ　２組の角がそれぞれ等しい

上記のように三角形の合同条件をもとに三角形の相似条件が考えられることから，統合的に考える子どものあらわれが見られるだろう。さらに三角形の合同条件アイウと三角形の相似条件エオキを比較することで，キの条件が特別に見えてくる。合同と相似の違いについても見いだすことができるだろう。

(2)四角形の相似条件への発展

三角形の相似条件をもとに四角形の相似条件へ，また，四角形の合同条件（四角形の決定条件）をもとに四角形の相似条件へ発展して考えてみる。すると「４組の辺の比がそれぞれ等しい」や「３角（４角）がそれぞれ等しい」などが予想されるが，どちらとも四角形は一つに決まらない（図 1）。

長方形と正方形は３角（４角）がそれぞれ等しく，正方形とひし形は４組の辺がそれぞれ等しいが四角形は一つに決まらない。つまり相似な図形も一つに決まらない。

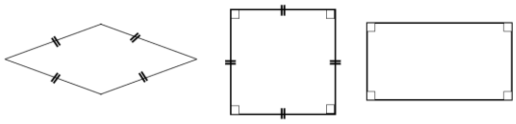


図 1　ひし形　正方形　長方形

「３組の辺とその間の１角」「３角とその間の１辺」も同様に四角形が一つに決まらない（図 2・図 3）。

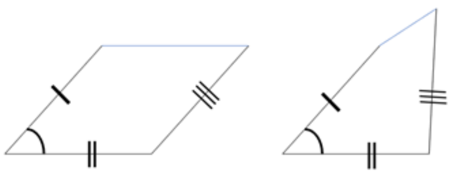


図 2　３組の辺とその間の１角

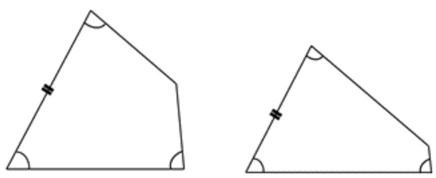


図 3　３角とその間の１辺

これらの反例や，辺と角の要素を４つ使った他のパターンについても反例があることを確認することができる。このことから，辺と角の要素４つでは四角形は一つに決まらないことがみえてくる。

次に５つの要素で相似条件を考えてみる。

ク　４組の辺の比とその間の１角

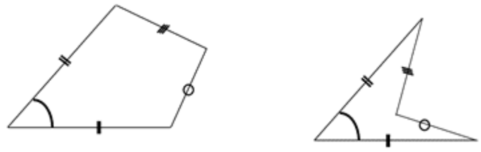


図 4　条件クの２種類の四角形

→凸四角形と凹四角形の２種類できてしまう。

ケ　３組の辺の比とその間の２角

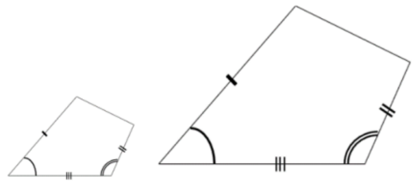


図 5　３組の辺の比とその間の２角
がそれぞれ等しい四角形

３組の辺の長さとその間の２角が定まれば，最後の１辺が固定され，四角形が一つに決まる（四角形の決定条件）。よって，条件ケを満たす 2 つの四角形は相似になる（図 5）。

コ　２組の辺の比とその間の角と両端の角

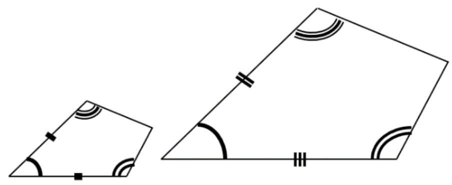


図 6　２組の辺の比とその間の角と両端の角がそれぞれ等しい四角形

２組の辺の長さとその間の角と両端の角が定まれば，最後の１点が固定され，四角形が一つに決まる（四角形の決定条件）。よって条件コを満たす２つの四角形は相似になる（図 6）。

要素を辺と内角に制限しなければ, これ以外にも「４組の辺の比と１本の対角線の比」「３組の辺の比と２本の対角線の比」などの条件も考えられるだろう。

条件を満たす四角形が一つに決まらないとき，合同条件にはならないことが分かる．条件を満たす２つの四角形で相似にならないものが見つかれば，相似条件とは言えないことが分かる。一つに決まらない多様な条件が考えられるが，数学の特性上一つでも反例が見つかれば，その性質は認められない。三角形に分割したり，四角形の合同条件を考えたりすることで，どのような場合でも四角形が一つに決まる条件を統合的・発展的に考えることのおもしろさがある。

(3)多角形の相似条件へ発展的に考察するおもしろさ

四角形の相似条件は５つの要素が必要である。同様に考えると五角形の相似条件は７つの要素（例：４辺

とその間の３角）が必要であることが予想される。この予想に基づき，頂点の数と相似条件に必要な構成要素の数の関係は，表１のようにまとめられる。

表１　頂点の数と相似条件に必要な構成要素の数

頂点の数	4	5	6	…	n
相似条件に必要な構成要素の数	5	7	9	…	２ｎ－３

つまりｎ角形には２ｎ－３個の要素が必要であることが予想される。例えば 100 角形のときは 197 個の要素がわかれば図形が一つに決まり，相似条件が言えるのである。

しかし, 三角形の相似条件「２角がそれぞれ等しい」は２ｎ－３には該当せず，たった２つの要素だけで相似と判断できるのである。

多角形（n 角形，n は 4 以上）の相似条件には，必ず辺についての条件が含まれている．一方，三角形の相似条件については, 角のみの条件からなるものがある．そのため，辺の長さを直接測定できない巨大な三角形でも，相似な三角形であるか判断できるのである。三角形の相似条件は，多角形の相似条件よりも日常の事象へ活用しやすいことに子どもたちは気づくだろう。

さらに，多角形の相似条件に必要な要素が２ｎ－３である理由を考える場合に，多角形を三角形に分割することで三角形の相似条件をもとに説明することができる。三角形の相似条件が言えることで，様々な図形の性質や規則を見いだすことにつながるのである。子どもたちは，「三角形は図形の基準である」ということについても改めて実感することができる。

このように，相似条件を追究することで，統合的・発展的に考察する子どもたちのあらわれをみとることができると考え，多角形の相似条件を統合的・発展的に考察する題材を構想した。

なお，J-STAGE で「四角形　相似」として論文を検索したところ，同様な実践事例は一つも見当たらなかったことから, 本研究に独自性があると言えるだろう。

５．単元構想・授業の実践

(1) 題材における問いの共有の捉えと単元構想

統合的・発展的な教材開発の先進事例については，美澤他（2023）では，「水汲み問題（ヘロンの問題）」と「図形を１回だけ折り返して相似な三角形を見つける問題」に関わる統合的・発展的な考察を促す教材研究と実践が行われている。ただし，これらの教材は授業者の扱い方によって，子どもの思考が様々な方向に広がり，子ども同士の対話が重なりにくい。対話が巻き起こらないならば深い学びには至らないだろう。単に，子どもたちの発展的な思考に委ねて授業を進めてしまうだけでは，子どもたちによる主体的な統合は起きにくい。

本校数学科では，年間を通して子どもから生み出された問いから授業を展開している。子どもたちは日常や数学の事象に対する素朴概念や誤概念ついて多くの疑問を抱いている。それらの疑問から，授業者が問い直しながら，全員で問いをつくりあげる，問いは子どもがつくるものである。問いをみんなでつくりあげるからこそ，問いが明確になり，課題解決に向かう推進力になると考えている。もちろん，子どもから出てくる疑問は曖昧であり，そのままを問いにすることは難しい時もある。そのような時には，授業者と子どものやりとりの中で，子どもたちの疑問を分類したり，焦点化したりする。また，問いの仮定と結論を明確にすることで，子どもたちは問い自体を発展させていくだろう。そして問いが明確化できたとき，その問いを共有することで，子どもたちは様々な数学的な見方・考え方を働かせて解を導き出す。発展して一定の解が導き出されると，子どもたちは「共通する解は何か」「ここから見いだせることはないだろうか」と新たな気づきや疑問など統合的な問いが生み出される。

このように発展的・統合的に問いをつなぐことで，子ども同士の対話が重なり，子どもたちによる主体的な統合が起きると考え, 表 2 のように単元を構想した。

表 2　単元構想（9 時間扱い）区切りを美しく

校時	授業テーマ 「授業で共有された問い」
第 1・2 時	相似な図形に関する疑問や気づいたことをあげよう 「相似とは？」
第 3 時	三角形の相似条件を考えよう 「三角形の相似条件とは？～どんなことが言えれば二つの三角形は相似と言えるのだろうか」
第 4・5 時	四角形の相似条件について考えよう 「四角形の相似条件は構成要素いくつで言えるだろうか」
第 6 時	五角形以上の相似条件について考えよう 「相似条件の追究～五角形以上の相似条件に必要な構成要素は？」

第７時	ｎ角形の相似条件について考えよう 「ｎ角形の相似条件は２ｎ—３と言えるだろうか」
第８時	これまでのことから何が言えるだろうか 「三角形の何が特別なのだろうか」
第９時	題材のふりかえり，アンケート

(2)実施時期と対象生徒

①本単元の実施時期：2023 年 11 月

②対象生徒：国立大学附属中学校３年生４クラス

(3)授業の概要と子どものあらわれ

第１時では iPad で地図を拡大縮小した画像を見たり，相似に関する教科書を読んだりして，普段考えている相似に関する気づきや疑問についてみんなで話し合った。子どもたちから相似の定義や三角形の相似条件の曖昧さなど，子どもたちから多様な疑問があげられた（資料 1）。

> 辺の長さは比例して大きく小さくなるのに，なぜ角度はずっと同じなのかわかりませんでした。私は，対応する辺の組み合わせは全部〇倍みたいに倍数で決まっているんじゃないかと思っていましたが，相似比で決まっているというのが分かりました。

資料１　第１時終了時の子ども A の記述

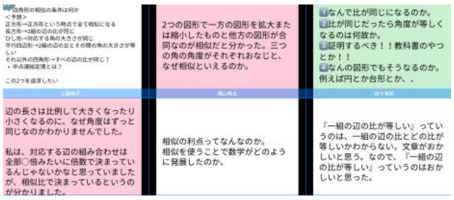
その中でも，相似の定義や三角形の相似条件の「２角がそれぞれ等し」ければ相似であるという相似条件に疑問を抱く子どもが多かった（たとえば資料 2）。

> 相似だと言える相似条件
> ・相似比が等しい＊
> ・２つの角度が等しい
> ・２組の辺の比とその間の角が等しい
> というものがある。1 組の辺と両端の角が等しいのはなぜないのか疑問。

＊「相似比が等しい」は「３組の辺の比が等しい」を意味していると考えられる

資料２　授業終了時の子ども B の記述

第２時のはじめに，ロイロノートで提出された子どもたちが抱く疑問を全体で共有した（資料 3）。



資料３　子どもたちの疑問をロイロノートで共有

授業者は疑問の中から「どの疑問から解決していけばよいか」となげかけた。「相似と合同って何が違うのだろうか」「相似な条件とは何だろう」子どもたちとやりとりしていく中で「そもそも相似とはどのようなことを言うのだろうか」という題材を貫く問いを共有した。

前時に教科書を読んでいた子どもたちから「相似の定義とは拡大縮小して合同になる図形」であることや「すべての辺の比が等しい」「すべての角が等しい」などの発言で相似の性質を確認した。さらに「すべての辺や角の要素がわからないと相似と言えないのだろうか」や「三角形の相似条件とは何だろうか」などの問いを焦点化し，次時に追究していこうとなげかけた（たとえば資料 4）。

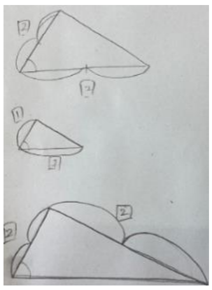
> （略）２組の角がそれぞれ等しかったら辺の比が等しくなるのは少し不思議に思った。
> １つの辺の比はいえなくてもよいのか。

資料４　子ども C の記述例

第３時では，前時で共有された問いから１：２の相似な図形をかくことを通して三角形の相似条件を追究した。三角形の要素が 6 個であることを確認し，授業者が「何個の要素で三角形の相似が言えるだろうか」となげかけると，「3 個か 2 個だろう」「合同条件と同じ３つだろう」と予想した子どもたちが多かった。子どもたちの考えが大きく分かれ①「6 個から一つずつ減らして相似条件を追究したい」と②「最低限の要素で条件を探したいから，2 個か 3 個で相似条件を考えたい」という２種類の考えを共有して，個人・グループで追究をしていった。

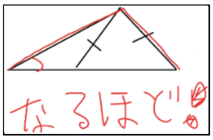
三角形は２角が等しければ３角が等しく，大きさは異なるが，形が決まる。３辺の比がそれぞれ等しい三角形も形が一つに決まることを全体で共有した。２辺の比とその間の角を「２組の辺の比とその間にない角」に変えると，三角形が一つに定まらない。つまり三角形の相似条件でないことを言うために，反例をあげる必要性に子どもたちは気づいた（資料 5，6）。

> ・二つの辺の比と一つの角が等しいと相似と言えるのか？
> 〇最初の考え→いけると思う。
> ＜理由＞
> 二つの辺の比が等しく延びると，三角形を保つためにあと一つの辺も必然的に「二つの辺と同じ比で」延びないといけなくなる。
> 三つの辺の比が同じ比で伸びるなら，角も必然的に合同になる。・・・という風に考えた。
> 〇今の考え→いけないと思う…。



＜理由＞
二つの辺の比と一つの角さえ等しければいいのであれば，三角形を大量生産できてしまいかねないから。もしこの条件で描くのであれば～（略）

資料 5　反例の必要性を感じた子ども D の記述



資料 6　反例を考えた子ども E の記述

また，三角形の構成要素 6 つから減らして相似条件を追究している子ども（資料 7）の考えを取り上げることで，「4 つ以上の構成要素は必要ない」「構成要素は必要最低限である」という考えが生まれた。

（略）拡大縮小した時に合同が言えるということは，比率が合っていることになるから，相似条件が正しいという証明になるかわからなかった。そのため，三角形の 6 つの要素から 1 つずつ除いても書けるのか試したら相似条件が正しいといえると思ったので，試してみたい。
例：3 つの角と 2 つの辺の比→2 つの角と 2 つの辺の比→…

資料 7　子ども F の記述

授業後の子どもたちのふりかえりに「四角形の相似条件はどうなっているのだろうか」という記述があった（資料 8）。

三角形の相似が言える最低限の要素は二つだった←これが四角形，五角形となるとどうなる？四つ五つという増え方をしていく？
三角形は角が三つで構成されているから二つわかればもう一つがわかる。ただし，角と辺の二つの要素がないと二つの辺だけだと証明できない→角がないといろんな角度で辺がつくれるから。

資料 8　子ども G の記述

第 4 時では授業者から「何を考えていくべきだろうか」となげかけると子どもたちから「三角形の相似条件が考えられたのだから四角形の相似条件を追究しよう」と発展的に考えようとする発言があった。その考えを受け止め，「四角形の相似条件はあるのだろうか」という問いを全体で共有し，追究していくこととした。三角形の相似条件が構成要素 2 つか 3 つであることから，構成要素いくつで相似が言えそうか予想させた。子どもたちは 3～6 つの要素で相似が言えそうだと予想した。実際に 1 ： 2 の四角形をかいたり，ストローで相似条件「四組の辺の比」を考察したりしていた（資料 9・写真 1）。

ストローで相似な四角形をつくった。
四角形には，8 つの要素があるので，だんだん減らしていって，何個でできるか試したい。
3 個が一番少なくできると思う。（3 つの角度）

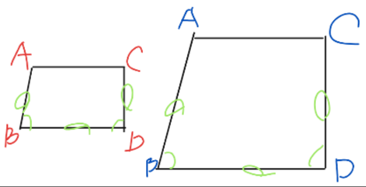
資料 9　子ども H の記述

写真 1　相似条件「四組の辺の比」を考察

四角形の合同条件は五つの要素で決まるから大体は 5 つの要素で相似も決まると思う。今日は 4 組の辺と角度を使えばかけた。

資料 10　子ども I の記述

今回の授業で 4 つの要素で四角形を相似と証明するのは難しいと思った。そのため以下の 3，2，1 の要素で証明するのも難しいのではないかと考えた。
また，相似かどうかを証明するためには，わざわざ証明したい要素だけを使って四角形を描く必要はなく「反例」を一つでも出せばいいのかと思った。
4 は無理だったが 5 はいけると確信している。
三組の隣接している辺の比と，その辺を繋いでいる二つの角の大きさがそれぞれ等しければ相似である。



資料 11　子ども J の記述

第 5 時では，それぞれが考えた四角形の相似条件（資料 10，11）を共有した。まずは「4 辺の比が等しい」という相似条件について議論した。ストローなど実際に模型をつくって 1 ： 2 の四角形を 2 つ示した子どもがいた。しかし，その模型の隣り合う 2 辺を内側に折ることで，4 辺が同じでも，2 種類以上の四角形が存在してしまうことに気づいた。この反例の存在により，4 辺の比が等しい図形は相似でないため，四角形の相似条件にはならないことが確認された。

次に，3 角が等しい（4 角が等しい）という条件について出されると，正方形と長方形のようにすべての角が等しく，90 度である場合は，相似な図形にはならないことが確認された。「構成要素が 4 つでは難しいだろう」という発言を受け，「構成要素 5 つなら相似な図形が出来る」という子どもの発言を全体で共有した。

「3 辺の比とその間の 2 角がそれぞれ等しい」は図

形が固定されるので１種類しか同じ形はかけない。「２辺の比とその間の角と両端の角がそれぞれ等しい」も同様に１種類しか同じ形がかけないため相似条件と言えるだろうと確認していった（写真２）。

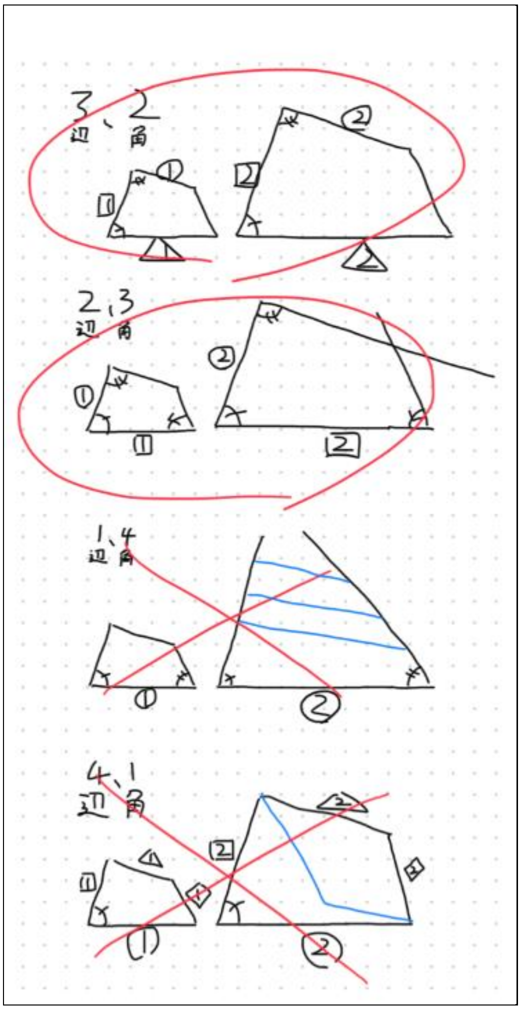


写真２　第５時の子ども B の記述

「３辺の比とその間の２角がそれぞれ等しい」という相似条件を発展して，ある子どもが「３辺の比と間にない２角がそれぞれ等し」ければ四角形が一つに定まるだろうと予想した。授業者はその予想を全体で共有し，子どもたちと対話しながら追究した。予想に対する反例が簡単には見つからないため子どもたちから「その条件で図形がかけたから相似条件としてもよいだろう」という発言が複数あった。そのような中，子どもの一部から「かけただけでは相似条件とは言えない，本当にそうなるかを証明する必要がある」という意見が出るなど議論が巻き起こった。議論が硬直しかけたその瞬間，ある子どもが図形アプリ geogebra を用いて，３辺と間ではない２角が等しい四角形で相似になるものが２種類以上あることを示した（写真 3）。予想に対する反例が見いだされた。

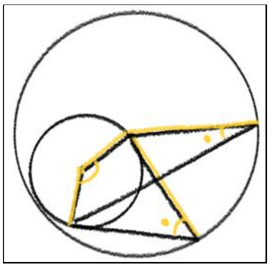
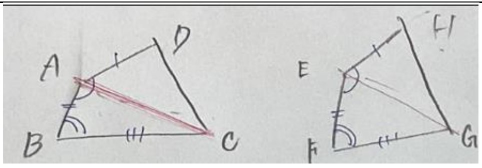


写真３　反例を考えた子ども K の記述

このように，予想に対する反例を探す子どもたちのあらわれからも主体的な学びの一端をみとることができる。

また，隣り合う３辺とその間の２角の要素がわかっている四角形を対角線で三角形２つに分割することで，「２辺と間の角」で三角形が一つに固定され，その三角形と残りの三角形で図形が一つに固定されることを証明した子どもがいた（資料 12）。

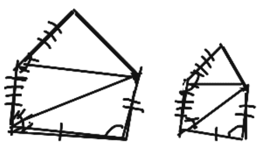


2 組の辺の比とその間の角
△ABC∽△EFG
これより AC=EG,AD=EH
2 組の辺の比とその間の角
△ADC∽△EHG
⇒三角形の相似条件でいえるから反例ができない

資料 12　子ども L の四角形の相似条件の証明

その証明により「隣り合う３辺の比と間の２角が等しい」という四角形の相似条件が学級内で認められた。その瞬間拍手がおこった。同じような証明で，隣り合う３角とその間の２辺の要素で四角形が一つに決まることも証明でき，２つの四角形の相似条件が示された。

四角形は三角形の相似条件の上にあることがわかった。つまり，四角形は二つの三角形の相似条件が言えれば四角形も相似と言えることとなる。二つの三角形の相似条件が言えるのは最低で５つなため，四角形の相似条件は最低で５つなのだと思う。そのため少し発展的になると，五角形は７こなのではないのかと考えた。



資料 13　第５時後の子ども J の記述

第６時では，四角形の相似条件に必要な構成要素の数が５個であることがわかったため，五角形の相似条件に必要な構成要素の数を子どもたちが発展的に考えようとしていた（資料 13）。授業者は子どもたちとや

りとりをしながら「五角形以上の相似条件に必要な構成要素の数はいくつになるだろうか」という問いを共有した。

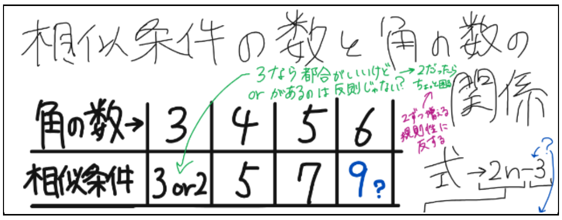


写真４　規則性を表で整理している子どもＤの記述

既に子どもたちは写真４のように，必要な最低限の要素は７個だろうと予想をたてていた。そのため「４辺の比とその間の３角」「４角とその間の３辺」という条件をあげ，三角形に分割して証明をした。

第７時で，ｎ角形の相似条件に必要な構成要素の数は，２ｎ－３になることを予想した子どもたちは「２ｎ－３になる理由」について追究し始めた。

・（ｎ－１）辺と（ｎ－２）角　または　（ｎ－２）辺と（ｎ－１）角の要素がわかれば図形が固定されるから（ｎ－２）＋（ｎ－１）＝（２ｎ－３）個の要素で図形が決定できる。

・多角形は（ｎ－２）個の三角形に分割することができる。最初の三角形は要素３つで大きさも形も決定する，その三角形からさらに要素を２つ加えると四角形が決定できる。さらに２つ要素を加えると五角形が決定する，・・・のように最初の要素から２つずつ要素を加えていけばｎ角形が決定されるため，３＋２（ｎ－２－１）＝２ｎ－３と言えるだろう。

このように２ｎ－３という式の意味を自分たちなりにつくりだしていった。

しかし，「三角形だけはこの式に当てはまらない」という発言で，「三角形だけなぜ特別なのだろう」という問いが共有され，次時に語り合うこととした（資料 14）。

五角形の相似条件をやってみて少し，規則性が見えてきた気がする。四角形は５個，五角形は７個なためｎ角形の相似条件は必ず奇数だと考えた。しかし，それだと三角形が当てはまらないため三角形は例外として考えた方がいいのではないかと考えた。

資料 14　第６時後の子どもＪの記述

第８時では，「三角形の特別さとは何だろう」という問いについて全体で語り合った。子どもたちは次のように語り合いを進め，本単元を終えた。

・２角形は存在せず，三角形は最小の図形である。

・三角形には隣り合う辺（角）しかない。

・三角形には平行な辺がない。四角形以上は平行な辺があるから，角度が決まっても，図形が一つに決まらない。だから三角形は角だけで相似な図形がかけるのだろう。

・三角形は対角線がない。それ以上分けられない図形である。このように三角形にしかないという見方ではなく「三角形だけない」ということが特別なのだろう。

・多角形の相似条件をつくるときに，三角形の相似条件をつかって，証明をした。多角形を三角形に分割することで新しいものをつくることができた。

・多角形のもとは三角形である。三角形は図形の基準，原点である。

(4)実践からの示唆

本題材では第１時に「そもそも相似とは？」という題材を貫く問いが生まれ，そこから「三角形の相似条件」→「四角形の相似条件」→「五角形以上の相似条件に必要な構成要素の数」→「三角形の特別さ」という問いの流れが子どもたちから生み出された。問いが発展したことで，相似条件を発展的に考察し，相似と合同のつながりや三角形と多角形の相違点に気づき，三角形に戻るという統合的な思考が生まれた。

また子どものふりかえりに次のような記述があった。

・学ぶ順番が，先生から教えられてから考えるのではなくて，自分たちが先に考えてから，共有をしてそこでさらに考えてから結論を出す感じの順番なので，より考えやすくなるというか，結論がわからないからこそ考えるパターンが生まれるからとても調べて図形とかを描いて検証している時間は楽しかったし，共有で自分が考えてなかったことや考えていたけど自分なりに結論づけられなかったものとかを理解できた。

このように，子どもたちは自分たちで問いを生み出し，学びの過程をつくりだすことに価値を見いだしていると言えるだろう。

６．アンケートからみえる統合的・発展的なあらわれ

(1)アンケート項目とその目的

単元終了後に行った子どもたちへのアンケートの質問項目（記述式）は，以下の資料 15 の通りである。

1. 題材の満足度の理由を教えてください。
2. 題材（三角形の相似条件や四角形の相似条件などの追究）を通して，あなたがおもしろいと思ったことはどんなことですか。
3. 本題材（相似条件の追究）を通して，学んだことを記述してください。
4. 複数回にわたる相似条件の追究を通して，数学の追究（探究）方法について，気づいたことを述べてください。
5. その他，何かあれば記入してください。

資料 15　単元終了後に行ったアンケート（n=117）

本アンケートの目的は，以下の通りである。
・質問項目 1～2 で統合的・発展的な考察の記述
・質問項目 3 で本題材の内容理解についての記述
・質問項目 4 で統合的・発展的な学び方に対する記述
・質問項目 5 は自由記述

授業者は上記のような目的でアンケートをとったが，実際は項目を越えた記述が多かったため，質問項目によらず総合的に分析した。

(2)アンケート分析からの示唆

文章をキーワード検索し以下のような結果になった。
①統合的に考察しているあらわれについて
三角形 98 人，四角形 81 人，五角形 36 人，六角 4 人，七角形 1 人，多角形 51 人，ｎ角形 29 人
→多角形とｎ角形を合わせて 80 人のように，約 70％が一般化について記述していることから統合的に考察していることが伺える。
②学び（学び方）を自覚しているあらわれについて

本題材における学び（学び方）を子どもたちがどのように自覚しているかをみとるため次の a～h のキーワードを用いて量的に分析した。
a.仮説，規則性，2n-3 などを記述
b.証明，根拠，理由，などに着目した記述
c.反例について記述
d.対話的なよさ，仲間の名前などを記述
e.三角形→四角形…ｎ角形，多角形を三角形に分割するなど様々な図形で捉えようとしている記述
f.表にまとめたり，整理したりするよさの記述
g.既習事項を生かして考えている記述
h.定義について記述（定義の重要さを分かっているため数学的な対話に進みやすい）

例えば自分なりの数学の学び方（仮説→証明）を記述している場合，a,b　のように判断した。

上記の記述があった子どもの人数は，資料 16 の通りである。また，複数の記述があった子どもの人数と割合は，資料 17 の通りである。

a	b	c	d	e	F	g	h
93	92	62	86	90	5	67	16

資料 16　キーワードの記述のあった人数（人）

複数記述	人数(％)
ab	73(62%)
abc	41(35%)
abcd	36(31%)
abcde	33(28%)
abcdef	1(0.1%)
abcde　g	24(21%)
abcde　gh	6(5%)

・abcde の記述は統合的発展的な学び方，さらに対話的な学びの良さを自覚している子どもが 33 人(28%)。
・abcde gh　の記述は統合的発展的な学び方，数学

資料 17　複数のキーワードの反応数（割合）

的に対話する良さ，さらに既習事項を生かしながら学ぶ良さを自覚している子どもが 6 人（5%）。→28%が統合的発展的な学び方，対話的な学びのよさを実感している。
③アンケート記述からみた本題材の価値
ア　生徒 SM の記述
・数学の上で新たなものを生み出す作業は決して一人でやるものではないと思う。これまで公式を出してきた人たちもきっと一人でやったわけではないと思う。〇〇の公式もきっとその人のみならずいろんな人の意見を用いて出た結果だと思う。だから今回のように新しいものを生み出すことは複数の人の知恵を借りて，違った視点から見ることが大事。一人だとどうしても固定の概念に引っ張られてしまって多様な意見が出てこず生み出すことには，ほど遠くなってしまう。 反例を見つける作業も自分が提案したものの反例には気づかなくなってしまう。 そこで人が必要になってくる。
→過去の偉人への尊敬や, 数学を学ぶ上で人の重要性, 学ぶよさを実感している。
イ　生徒 SK の記述
・（略）今回の題材でも，自分の中では反例がなく成り立つと思っていたものが，友達に客観的に見てもらうことによって反例を持っていたりした。そのため，論理的に考えるための手段として，「客観的に考えること」が大切であるということを学んだ。 今回は友達に見てもらうことで客観的に考えたが，自分の中でも客観的に考えられるようにしていきたい。
→本実践を通して「人間性」を育む兆しが見いだされた。本校数学科の「育みたい人間像」をめざし，願う学びをもって題材を構想し授業実践することで，現行学習指導要領のめざす「主体的・対話的で深い学び」に向かう子どものあらわれが見られた。それこそが本実践による示唆であると考える。

７．今後の課題

今後は，本研究の量的データと，子どもの学びを比較することにより，子どもの思考力・判断力・表現力のあらわれをきめ細やかにみとるとともに，本単元につながる統合的・発展的な教材開発について考えていきたい。

８．謝辞

本論文の研究にあたり，多くの方々にご協力いただきました。静岡大学の谷本龍二准教授には研究から執筆まで終始適切なご指導賜りました。深く感謝申し上げます。関係の皆様, 本当にありがとうございました。

引用・参考文献

美澤将史・稲熊紀昭・柗元新一郎（2023），中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指

導：「平面図形」と「相似な図形」での教材開発と実践, 静岡大学教育実践総合センター紀要, 33, 208-221.
文部科学省（2016），算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ. https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/1376993.htm
文部科学省（2018a），中学校学習指導要領（平成 29 年 3 月告示），東山書房.
文部科学省（2018b），学習指導要領（平成 29 年 3 月告示）解説数学編，日本文教出版.
中島健三(2015)，算数・数学教育と数学的な考え方とその進展のための考察（復刻版）.東洋館出版社，（原著出版 1982 年）
片桐重男(2017)，数学的な考え方の具体化　数学的な考え方・態度とその指導①，明治図書，（原著出版 1988 年）